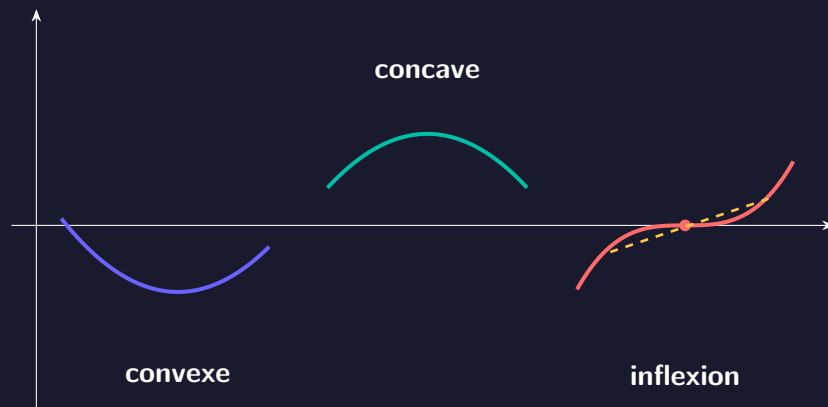


# Dérivée seconde, convexité & points d'inflexion

Courbure ■ Convexité ■ Concavité ■ Tangentes ■ Changement de courbure



Terminale - Spécialité Mathématiques - Programme d'Excellence



## Table des matières

<b>1</b>	<b>🔍 Pourquoi étudier la dérivée seconde ?</b>	<b>3</b>
1.1	Passer de la pente à la variation de la pente . . . . .	3
1.2	Une idée centrale en sciences . . . . .	3
1.3	Le lien profond avec la lecture des graphes . . . . .	3
<b>2</b>	<b>🧠 L'idée avant la formule</b>	<b>4</b>
2.1	La pente qui change . . . . .	4
2.2	Le bol et le chapeau . . . . .	4
2.3	Le point d'inflexion : le point de bascule . . . . .	5
<b>3</b>	<b>🎓 Le cours formel</b>	<b>6</b>
3.1	Définition de la dérivée seconde . . . . .	6
3.2	Ce que dit le signe de $f''$ . . . . .	6
3.3	Convexité, concavité et tangentes . . . . .	7
3.4	Le point d'inflexion . . . . .	8
3.5	Méthode complète pour étudier la convexité d'une fonction . . . . .	9
3.6	Exemple très détaillé d'étude complète . . . . .	9
3.7	Exemples de référence à connaître . . . . .	10
<b>4</b>	<b>🧰 La boîte à outils - Réflexes pour le bac</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>✎ Exercices progressifs</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>🔑 Problème - Inégalités de convexité et approximation</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>✅ Corrigés détaillés</b>	<b>16</b>

# 1 ? Pourquoi étudier la dérivée seconde ?

## 1.1 Passer de la pente à la variation de la pente

Dans la fiche précédente, la dérivée première a permis de répondre à une question capitale : *la fonction monte-t-elle ou descend-t-elle ?* La dérivée seconde pousse l'analyse un cran plus loin, avec une question encore plus fine :

### La vitesse d'augmentation elle-même augmente-t-elle ou diminue-t-elle ?

Autrement dit, la dérivée première mesure une **pente**, tandis que la dérivée seconde mesure la **variation de cette pente**. C'est elle qui renseigne sur la **courbure** de la courbe.

Une fonction peut très bien être croissante tout en devenant de moins en moins raide. Elle peut aussi être décroissante tout en se redressant progressivement. Ces nuances ne sont pas visibles avec le seul signe de  $f'$  : il faut à ce moment-là regarder  $f''$ .

## 1.2 Une idée centrale en sciences

La dérivée seconde est partout :

- en physique, si  $x(t)$  désigne une position, alors  $x'(t)$  est la vitesse et  $x''(t)$  l'accélération ;
- en économie, elle permet de savoir si une croissance s'accélère ou ralentit ;
- en optimisation, elle aide à distinguer un sommet d'un creux ;
- en géométrie, elle indique si une courbe est en forme de bol, de chapeau, ou si elle change de courbure.

Cette dernière idée est fondamentale pour le baccalauréat : lorsqu'on demande une **étude complète de fonction**, on ne s'arrête pas aux variations. On cherche aussi les intervalles de **convexité**, de **concavité** et les **points d'inflexion**.

## 1.3 Le lien profond avec la lecture des graphes

Ce chapitre permet de faire le pont entre le calcul algébrique et la lecture visuelle des courbes.

Avec  $f'$ , tu lis **dans quel sens la courbe se déplace**. Avec  $f''$ , tu lis **de quelle manière elle se plie**. C'est exactement ce qui donne à une courbe son allure : arrondie vers le haut, vers le bas, ou changeant de forme en un point particulier.

Une fois ce chapitre maîtrisé, tu ne regarderas plus un graphe comme une simple ligne : tu sauras décrire son comportement avec précision et l'expliquer mathématiquement.

## 2 L'idée avant la formule

### 2.1 La pente qui change

#### Intuition | Observer trois tangentes successives

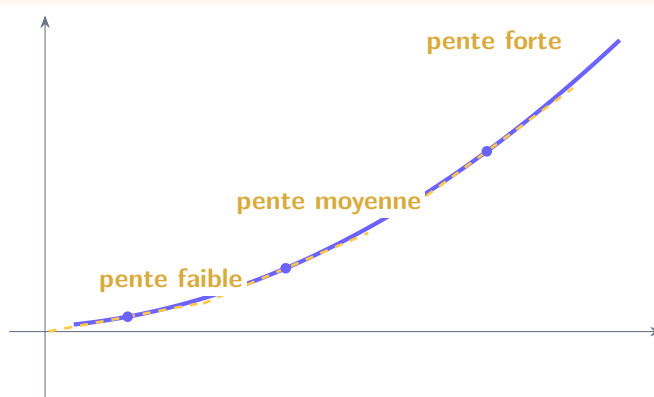
Imagine une courbe et trois points très proches dessus : un à gauche, un au milieu, un à droite.

- Si les tangentes deviennent de plus en plus inclinées vers le haut quand on avance de gauche à droite, alors les pentes augmentent : la dérivée première croît, donc la dérivée seconde est positive.
- Si les tangentes deviennent de moins en moins inclinées, ou se penchent de plus en plus vers le bas, alors les pentes diminuent : la dérivée première décroît, donc la dérivée seconde est négative.

Il faut vraiment retenir cette phrase-clé :

$$f'' \text{ parle de l'évolution de } f'.$$

La dérivée seconde ne regarde pas directement la hauteur de la courbe, mais la manière dont la pente se transforme.



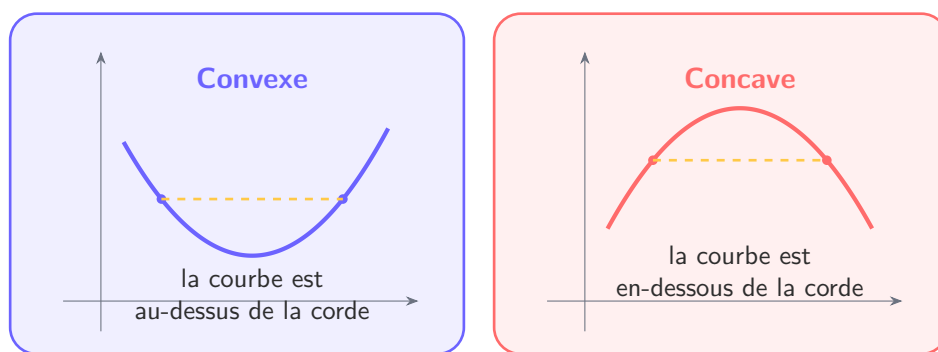
Ici, les pentes augmentent au fur et à mesure : la courbe est **convexe**.

### 2.2 Le bol et le chapeau

#### Intuition | Deux images mentales à garder absolument

- Une courbe **convexe** ressemble à un bol, une vallée, une coupe. Elle est tournée vers le haut.
- Une courbe **concave** ressemble à un chapeau, un dôme renversé. Elle est tournée vers le bas.

Ces images ne sont pas juste esthétiques. Elles te permettent d'anticiper le signe de  $f''$  avant même d'avoir calculé quoi que ce soit.



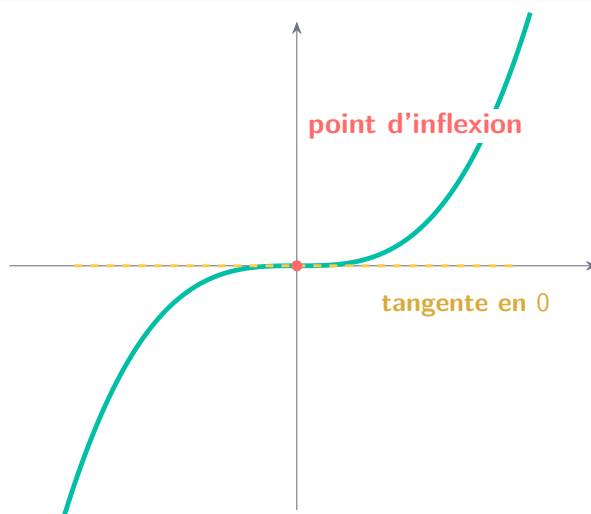
## 2.3 Le point d'inflexion : le point de bascule

### Intuition | Quand la courbe change de personnalité

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe change de courbure.

- avant ce point, elle peut être convexe ;
- après ce point, elle devient concave ;
- ou l'inverse.

Le modèle le plus célèbre est la fonction  $f(x) = x^3$ . À gauche de 0, la courbe se comporte d'une certaine façon ; à droite, elle se comporte à l'inverse. Le point  $(0, 0)$  est alors un point d'inflexion.



*Ce n'est pas seulement la pente qui compte, mais la façon dont elle change.*

### 3 Le cours formel

#### 3.1 Définition de la dérivée seconde

##### Définition | Dérivées successives

Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Sa dérivée première est la fonction notée  $f'$ .
- Si la fonction  $f'$  est elle-même dérivable, alors sa dérivée s'appelle la **dérivée seconde** de  $f$  et se note  $f''$ .

Autrement dit :

$$f'' = (f')'$$

Le vocabulaire exact à retenir est le suivant :

- $f$  donne une hauteur, une position, une quantité ;
- $f'$  mesure une variation instantanée ;
- $f''$  mesure la variation de cette variation.

##### Exemple | Premiers calculs de dérivées secondes

- Si  $f(x) = x^2$ , alors

$$f'(x) = 2x \quad \text{et} \quad f''(x) = 2.$$

La dérivée seconde est strictement positive : la courbe de  $x^2$  est convexe sur tout  $\mathbb{R}$ .

- Si  $g(x) = -x^2$ , alors

$$g'(x) = -2x \quad \text{et} \quad g''(x) = -2.$$

La dérivée seconde est strictement négative : la courbe de  $-x^2$  est concave sur tout  $\mathbb{R}$ .

- Si  $h(x) = x^3$ , alors

$$h'(x) = 3x^2 \quad \text{et} \quad h''(x) = 6x.$$

Ici, le signe de  $h''$  change en 0 : la courbe change de courbure en 0.

#### 3.2 Ce que dit le signe de $f''$

##### Théorème | Critère fondamental de convexité

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si pour tout  $x \in I$ , on a  $f''(x) \geq 0$ , alors  $f$  est **convexe** sur  $I$ .
- Si pour tout  $x \in I$ , on a  $f''(x) \leq 0$ , alors  $f$  est **concave** sur  $I$ .

Si les inégalités sont strictes, on obtient une convexité ou une concavité stricte.

### ✓ Propriété | Lien avec la dérivée première

Toujours sous l'hypothèse que  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$  :

- si  $f'' \geq 0$  sur  $I$ , alors  $f'$  est croissante sur  $I$  ;
- si  $f'' \leq 0$  sur  $I$ , alors  $f'$  est décroissante sur  $I$ .

C'est souvent la formulation la plus simple à comprendre :

$$f'' > 0 \implies \text{les pentes augmentent}$$

$$f'' < 0 \implies \text{les pentes diminuent}$$

### Démonstration | Pourquoi le signe de $f''$ agit-il sur $f'$ ?

On applique au chapitre précédent le raisonnement sur les variations, non plus à la fonction  $f$ , mais à la fonction  $f'$ . Si la dérivée de  $f'$  est positive sur un intervalle, alors  $f'$  y est croissante. Or la dérivée de  $f'$  n'est rien d'autre que  $f''$ .

Donc :

- $f'' > 0$  signifie que  $f'$  augmente ;
- $f'' < 0$  signifie que  $f'$  diminue.

Une fois ce point compris, la convexité devient très naturelle : une courbe convexe est une courbe dont les tangentes se redressent progressivement.

## 3.3 Convexité, concavité et tangentes

### Définition | Convexe et concave : lecture géométrique

Une fonction est dite :

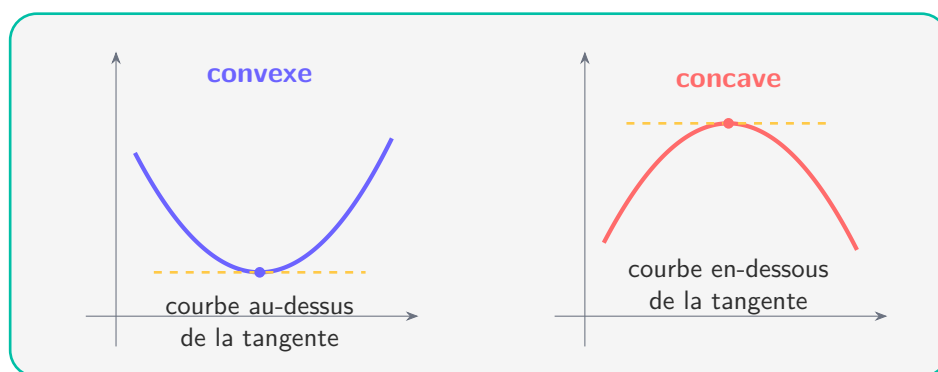
- **convexe** sur un intervalle lorsque sa courbe est tournée vers le haut ;
- **concave** sur un intervalle lorsque sa courbe est tournée vers le bas.

### ★ Théorème | Position de la tangente

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f$  est convexe sur  $I$ , alors toute tangente à la courbe est **en-dessous** de la courbe, au voisinage du point de tangence et même sur tout l'intervalle dans le cadre usuel du programme.
- Si  $f$  est concave sur  $I$ , alors toute tangente est **au-dessus** de la courbe.

Cette propriété est très utile pour comprendre les dessins et aussi pour répondre à certaines questions de bac du type : « la courbe est-elle au-dessus ou au-dessous de sa tangente ? »



### 3.4 Le point d'inflexion

#### 📖 Définition | Point d'inflexion

On dit que la courbe de  $f$  admet un **point d'inflexion** en un point d'abscisse  $a$  si la courbe change de convexité en ce point.

En pratique :

- elle est convexe avant  $a$  et concave après  $a$  ;
- ou concave avant  $a$  et convexe après  $a$ .

#### ✅ Propriété | Critère pratique

Si  $f''$  change de signe en  $a$ , alors la courbe de  $f$  admet un point d'inflexion d'abscisse  $a$ .

#### ⚠ Attention | Erreur classique absolument fondamentale

Le fait que  $f''(a) = 0$  **ne suffit pas** à conclure qu'il y a un point d'inflexion.

Contre-exemple très classique :

$$f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 12x^2$$

On a bien  $f''(0) = 0$ , mais  $12x^2 \geq 0$  de part et d'autre de 0 ; il n'y a donc **aucun changement de signe**. La courbe reste convexe avant et après 0 : il n'y a pas de point d'inflexion.

#### 💡 Exemple | Exemple canonique : $f(x) = x^3$

On calcule :

$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{et} \quad f''(x) = 6x$$

On lit alors le signe de  $f''$  :

- si  $x < 0$ , alors  $6x < 0$ , donc la courbe est concave ;
- si  $x > 0$ , alors  $6x > 0$ , donc la courbe est convexe.

Il y a bien changement de convexité en 0.

Conclusion : la courbe de  $f(x) = x^3$  admet un point d'inflexion en **(0, 0)**.



### 3.5 Méthode complète pour étudier la convexité d'une fonction

#### ✂ Méthode | Le protocole gagnant au bac

Pour étudier la convexité d'une fonction, il faut suivre la même méthode, toujours dans le même ordre :

1. **Déterminer le domaine de définition** de la fonction. On ne fait jamais un tableau de signe de  $f''$  sans savoir où la fonction existe.
2. **Calculer  $f'(x)$  puis  $f''(x)$**  avec soin. Les erreurs de dérivation à ce stade ruinent toute l'étude.
3. **Factoriser  $f''(x)$**  autant que possible pour lire son signe facilement.
4. **Résoudre l'équation  $f''(x) = 0$**  et repérer aussi les valeurs interdites si la fonction n'est pas définie partout.
5. **Dresser le tableau de signe de  $f''$** . C'est lui qui donne directement les intervalles de convexité et de concavité.
6. **Chercher les changements de signe**. C'est seulement à cette condition qu'on peut conclure à un point d'inflexion.
7. **Donner les coordonnées exactes du point d'inflexion**. Si l'abscisse vaut  $a$ , l'ordonnée est  $f(a)$ .

### 3.6 Exemple très détaillé d'étude complète

#### 💡 Exemple | Étudier la convexité de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

On veut déterminer les intervalles de convexité, de concavité, puis les points d'inflexion.

#### 1. Domaine de définition.

La fonction est polynomiale, donc définie sur tout  $\mathbb{R}$ .

#### 2. Calcul de la dérivée première.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

#### 3. Calcul de la dérivée seconde.

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

#### 4. Zéros de $f''$ .

$$6(x - 1) = 0 \iff x = 1$$

#### 5. Tableau de signe de $f''$ .

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$0$	$+$
$f''(x) = 6(x - 1)$	$-$	$0$	$+$

#### 6. Interprétation.

— sur  $] -\infty, 1[$ , on a  $f''(x) < 0$ , donc  $f$  est concave ;

— sur  $]1, +\infty[$ , on a  $f''(x) > 0$ , donc  $f$  est convexe.

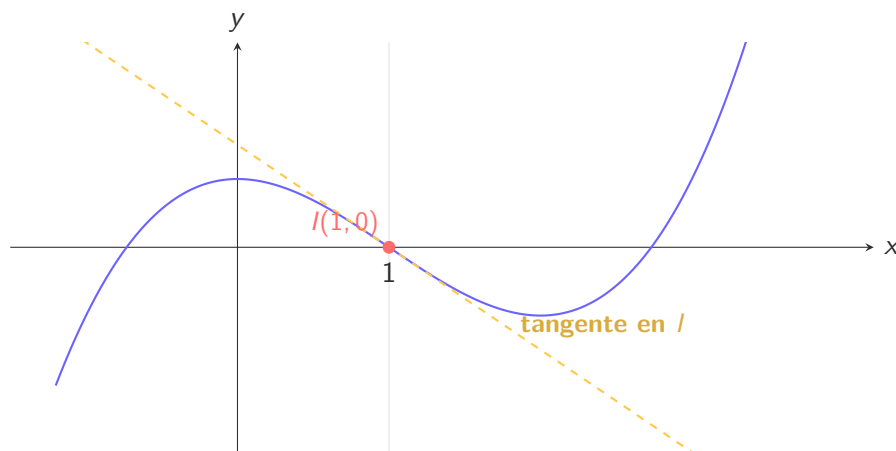
#### 7. Point d'inflexion.

Comme  $f''$  change de signe en 1, la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 1. On calcule son ordonnée :

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$$

Le point d'inflexion est donc :

$$I(1, 0)$$



### 3.7 Exemples de référence à connaître

#### 💡 Exemple | Fonctions classiques et leur courbure

Fonction	Dérivée seconde	Signe de $f''$	Conclusion
$f(x) = x^2$	$f''(x) = 2$	positif	convexe sur $\mathbb{R}$
$f(x) = -x^2$	$f''(x) = -2$	négatif	concave sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f''(x) = 6x$	change en 0	inflexion en 0
$f(x) = e^x$	$f''(x) = e^x$	strictement positif	convexe sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$	$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$	strictement négatif	concave sur $]0, +\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$f''(x) = -\sin(x)$	variable	convexité variable

#### 💡 Exemple | Un exemple avec produit : $g(x) = xe^x$

La fonction n'est pas seulement utile pour les exercices : elle oblige à bien utiliser la règle du produit.

**Première dérivée :**

$$g'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + 1)e^x$$

**Seconde dérivée :** On doit redériver le produit  $(x + 1)e^x$  :

$$g''(x) = 1 \cdot e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$$

Comme  $e^x > 0$  pour tout réel  $x$ , le signe de  $g''$  est celui de  $x + 2$ .

— si  $x < -2$ , alors  $g''(x) < 0$  : la courbe est concave ;

— si  $x > -2$ , alors  $g''(x) > 0$  : la courbe est convexe.

Il y a donc un point d'inflexion d'abscisse  $-2$ . Son ordonnée vaut :

$$g(-2) = -2e^{-2}$$

Donc le point d'inflexion est :

$$I(-2, -2e^{-2})$$

## 4 La boîte à outils - Réflexes pour le bac

### Méthode | Les bons réflexes en 20 secondes

Quand un exercice te parle de convexité, il faut immédiatement penser à cette suite d'idées :

1. **Je calcule  $f''$ .**
2. **Je factorise.**
3. **Je fais un tableau de signe.**
4. **Je traduis :  $f'' > 0$  donne convexe,  $f'' < 0$  donne concave.**
5. **Je regarde les changements de signe.**
6. **Je donne les coordonnées des points d'inflexion.**

### Méthode | Formulations de rédaction à connaître

Voici des phrases propres et efficaces à réutiliser en devoir :

- « Pour tout  $x$  de l'intervalle considéré, on a  $f''(x) \geq 0$ , donc la fonction  $f$  est convexe sur cet intervalle. »
- « La dérivée seconde change de signe en  $a$ , donc la courbe de  $f$  admet un point d'inflexion d'abscisse  $a$ . »
- « On calcule  $f(a)$  afin d'obtenir l'ordonnée du point d'inflexion. »
- « Comme  $f$  est convexe, sa courbe est située au-dessus de ses tangentes. »

### Attention | Top 6 des erreurs fatales

1. **Confondre extremum et point d'inflexion.** Un extremum se lit en général avec  $f'$ , un point d'inflexion avec le changement de signe de  $f''$ .
2. **Dire : " $f''(a) = 0$ , donc il y a inflexion".** C'est faux sans étude du signe de part et d'autre.
3. **Oublier le domaine de définition.** On ne parle jamais de convexité là où la fonction n'existe pas.
4. **Mal redériver.** La plupart des erreurs viennent d'une seconde dérivation mal faite, surtout avec les produits, quotients ou compositions.
5. **Oublier l'ordonnée du point d'inflexion.** L'abscisse seule ne suffit pas ; il faut donner le point complet.
6. **Ne pas traduire le tableau de signe.** Un tableau ne remplace pas une phrase de conclusion. Le correcteur attend une interprétation claire.

## 5 Exercices progressifs

### Exercice 1 - Dérivées secondes directes

Calculer  $f'(x)$  puis  $f''(x)$  pour chacune des fonctions suivantes :

- a)  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$
- b)  $g(x) = e^x$
- c)  $h(x) = \ln(x)$  sur  $]0, +\infty[$
- d)  $k(x) = x^3$

### Exercice 2 - Lire la courbure avec $f''$

Pour chaque fonction, étudier la convexité et la concavité :

- a)  $f(x) = x^2$
- b)  $g(x) = -x^2 + 5$
- c)  $h(x) = x^3$

### Exercice 3 - Premier point d'inflexion

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^3 - 6x$$

- a) Calculer  $f''(x)$ .
- b) Étudier le signe de  $f''(x)$ .
- c) En déduire l'existence d'un point d'inflexion et donner ses coordonnées.

### Exercice 4 - Le logarithme népérien

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$f(x) = \ln(x)$$

- a) Calculer  $f'(x)$  puis  $f''(x)$ .
- b) Étudier la convexité de  $f$  sur son domaine.
- c) Que peut-on dire de la position de la courbe par rapport à ses tangentes ?

### Exercice 5 - Produit et changement de courbure

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^x$$

- a) Calculer  $f''(x)$ .
- b) Étudier le signe de  $f''(x)$ .
- c) Déterminer les intervalles de convexité et le point d'inflexion éventuel.

### Exercice 6 - Un zéro de $f''$ ne suffit pas

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^4$$

- a) Calculer  $f''(x)$ .
- b) Vérifier que  $f''(0) = 0$ .
- c) La courbe admet-elle pour autant un point d'inflexion en 0 ? Justifier soigneusement.

*Ce n'est pas seulement la pente qui compte, mais la façon dont elle change.*

**Exercice 7** ★★☆☆ - Etude complète de la courbure

On considère la fonction

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

- a) Calculer  $f''(x)$ .
- b) Étudier le signe de  $f''(x)$ .
- c) Déterminer les intervalles de convexité et de concavité.
- d) Donner les coordonnées du point d'inflexion.

**Exercice 8** ★★☆☆ - Fonction rationnelle

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

- a) Calculer  $f''(x)$ .
- b) Étudier le signe de  $f''(x)$  sur chacun des intervalles de définition.
- c) La courbe admet-elle un point d'inflexion ? Expliquer avec précision.

**Exercice 9** ★★☆☆ - Fonction avec racine

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-1, +\infty[$  par

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$$

- a) Simplifier l'expression de  $f(x)$  sous la forme d'une puissance.
- b) Calculer  $f''(x)$  sur  $] -1, +\infty[$ .
- c) Étudier la convexité de  $f$ .

**Exercice 10** ★★★ - Vrai ou Faux

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant :

- a) « Si  $f''(a) = 0$ , alors  $a$  est l'abscisse d'un point d'inflexion. »
- b) « Si  $f''(x) > 0$  sur un intervalle, alors  $f'(x)$  y est croissante. »
- c) « Si une fonction est concave sur un intervalle, alors sa courbe est au-dessus de ses tangentes. »
- d) « Une fonction peut être croissante et concave sur un même intervalle. »

**Exercice 11** ★★★ - Tangente en un point d'inflexion

On considère la fonction  $f(x) = x^3$ .

- a) Montrer que la courbe admet un point d'inflexion en 0.
- b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
- c) Comparer, selon le signe de  $x$ , la position de la courbe de  $f$  par rapport à cette tangente.

**Exercice 12** ★★★ - Modélisation physique

On modélise la position d'un mobile par

$$s(t) = t^3 - 3t^2 + 2 \quad (t \in \mathbb{R})$$

- a) Interpréter physiquement  $s'(t)$  et  $s''(t)$ .
- b) Calculer  $s''(t)$ .
- c) À quel instant l'accélération change-t-elle de signe ?
- d) Que peut-on en déduire sur la courbure de la courbe représentative de  $s$  ?

*Ce n'est pas seulement la pente qui compte, mais la façon dont elle change.*

## 6 🐼 Problème - Inégalités de convexité et approximation



### 🔥 Problème style prépa

Ce problème explore les conséquences profondes de la convexité : inégalités célèbres, position relative d'une courbe et de ses tangentes, et approximation de fonctions. Il mêle dérivée seconde, convexité, inégalité de Jensen et développement limité.

### Partie A - Convexité de l'exponentielle et inégalités

On considère la fonction  $f(x) = e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer  $f''(x)$  et en déduire que  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
2. En utilisant la propriété « une fonction convexe est toujours au-dessus de ses tangentes », écrire l'inégalité obtenue avec la tangente en  $x = 0$ . En déduire que :

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

3. En appliquant cette inégalité à  $x = \frac{a}{n}$  où  $a > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que :

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq e^a$$

4. (Bonus) En appliquant l'inégalité  $e^x \geq 1 + x$  à  $x = -\frac{a}{n}$ , montrer que :

$$e^a \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n} \quad \text{pour } n > a$$

### Partie B - Concavité du logarithme et inégalité arithmético-géométrique

On considère la fonction  $g(x) = \ln(x)$  définie sur  $]0, +\infty[$ .

5. Calculer  $g''(x)$  et en déduire que  $g$  est concave sur  $]0, +\infty[$ .
6. Pour une fonction concave, la courbe est **en dessous** de ses tangentes. Écrire l'inégalité obtenue avec la tangente en  $x = 1$ , et en déduire :

$$\ln(x) \leq x - 1 \quad \text{pour tout } x > 0$$

7. Soient  $a, b > 0$ . En appliquant l'inégalité précédente à  $x = \frac{a}{b}$ , montrer que :

$$\ln(a) - \ln(b) \leq \frac{a}{b} - 1$$

8. En déduire l'**inégalité arithmético-géométrique** : pour tous  $a, b > 0$ ,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

avec égalité si et seulement si  $a = b$ .

*Indication* : appliquer l'inégalité de la question 6 puis celle obtenue en échangeant  $a$  et  $b$ , et additionner.

### Partie C - Approximation quadratique et point d'inflexion

On considère  $h(x) = x e^{-x}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

9. Calculer  $h'(x)$ ,  $h''(x)$  et  $h'''(x)$ .
10. Déterminer le point d'inflexion  $I$  de la courbe  $\mathcal{C}_h$ .
11. Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $\mathcal{C}_h$  au point d'inflexion  $I$ .
12. Montrer que  $(T)$  **traverse** la courbe en  $I$  : étudier le signe de  $h(x) - T(x)$  au voisinage de  $x = 2$ , où  $T(x)$  désigne l'expression de la tangente.

*Indication* : factoriser  $h(x) - T(x)$  en utilisant  $h''(2) = 0$ .

*Ce n'est pas seulement la pente qui compte, mais la façon dont elle change.*

## 7 Corrigés détaillés

### Corrigé - Exercice 1

a) Si  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ , alors

$$f'(x) = 4x^3 - 6x$$

puis

$$f''(x) = 12x^2 - 6$$

b) Si  $g(x) = e^x$ , alors

$$g'(x) = e^x \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x$$

c) Si  $h(x) = \ln(x)$  sur  $]0, +\infty[$ , alors

$$h'(x) = \frac{1}{x}$$

puis

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

d) Si  $k(x) = x^3$ , alors

$$k'(x) = 3x^2 \quad \text{et} \quad k''(x) = 6x$$

### Corrigé - Exercice 2

a) Pour  $f(x) = x^2$ , on a  $f''(x) = 2 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Donc  $f$  est **convexe sur  $\mathbb{R}$** .

b) Pour  $g(x) = -x^2 + 5$ , on a  $g''(x) = -2 < 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Donc  $g$  est **concave sur  $\mathbb{R}$** .

c) Pour  $h(x) = x^3$ , on a  $h''(x) = 6x$ .

— sur  $] -\infty, 0[$ ,  $6x < 0$ , donc  $h$  est concave ;

— sur  $]0, +\infty[$ ,  $6x > 0$ , donc  $h$  est convexe.

Il y a changement de signe en 0, donc point d'inflexion en  $(0, 0)$ .

### Corrigé - Exercice 3

On considère  $f(x) = x^3 - 6x$ .

a) On calcule :

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \quad \text{et} \quad f''(x) = 6x$$

b) Le signe de  $f''(x)$  est celui de  $x$  :

—  $f''(x) < 0$  si  $x < 0$  ;

—  $f''(0) = 0$  ;

—  $f''(x) > 0$  si  $x > 0$ .

c) Il y a changement de signe en 0, donc point d'inflexion d'abscisse 0. Comme  $f(0) = 0$ , le point est

$I(0, 0)$

### Corrigé - Exercice 4

On considère  $f(x) = \ln(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .

a)

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

*Ce n'est pas seulement la pente qui compte, mais la façon dont elle change.*



- b) Pour tout  $x > 0$ , on a  $x^2 > 0$ , donc  $-\frac{1}{x^2} < 0$ . Ainsi,

$$f''(x) < 0 \quad \text{sur } ]0, +\infty[$$

Donc  $f$  est **concave** sur  $]0, +\infty[$ .

- c) Comme la fonction est concave, sa courbe est située **en-dessous de ses tangentes**.

### Corrigé - Exercice 5

On considère  $f(x) = xe^x$ .

- a) Première dérivée :

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

Seconde dérivée :

$$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

- b) Comme  $e^x > 0$  pour tout  $x$ , le signe de  $f''(x)$  est celui de  $x+2$ .

— si  $x < -2$ , alors  $f''(x) < 0$ ;

— si  $x = -2$ , alors  $f''(x) = 0$ ;

— si  $x > -2$ , alors  $f''(x) > 0$ .

- c) Donc la fonction est concave sur  $] -\infty, -2[$  et convexe sur  $] -2, +\infty[$ . Il y a changement de signe en  $-2$ , donc point d'inflexion. Or

$$f(-2) = -2e^{-2}$$

donc

$$I(-2, -2e^{-2})$$

### Corrigé - Exercice 6

On considère  $f(x) = x^4$ .

- a)

$$f'(x) = 4x^3 \quad \text{et} \quad f''(x) = 12x^2$$

- b) On a bien

$$f''(0) = 12 \times 0^2 = 0$$

- c) Cependant, pour tout réel  $x$ , on a  $x^2 \geq 0$ , donc

$$12x^2 \geq 0$$

La dérivée seconde ne change pas de signe au voisinage de 0 : elle reste positive ou nulle de chaque côté.

La courbe reste donc convexe avant et après 0. Il n'y a **pas** de point d'inflexion en 0.

### Corrigé - Exercice 7

On considère  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ .

- a)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \text{et} \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

- b) Le signe de  $f''$  est celui de  $x-1$ .

— si  $x < 1$ , alors  $f''(x) < 0$ ;

*Ce n'est pas seulement la pente qui compte, mais la façon dont elle change.*

— si  $x = 1$ , alors  $f''(x) = 0$ ;

— si  $x > 1$ , alors  $f''(x) > 0$ .

c) Donc  $f$  est concave sur  $] -\infty, 1[$  et convexe sur  $]1, +\infty[$ .

d) Comme il y a changement de signe en 1, la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 1. Or

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$$

donc

$$I(1, 0)$$

### Corrigé - Exercice 8

On considère  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

a)

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

puis

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

b) Le signe de  $f''$  est celui de  $(x+1)^3$ .

— sur  $] -\infty, -1[$ , on a  $(x+1)^3 < 0$ , donc  $f''(x) < 0$ ;

— sur  $] -1, +\infty[$ , on a  $(x+1)^3 > 0$ , donc  $f''(x) > 0$ .

c) Bien que le signe change "autour" de  $-1$ , on ne peut pas parler de point d'inflexion en  $-1$  car la fonction n'est pas définie en  $-1$ . Il n'y a donc **aucun point d'inflexion**.

### Corrigé - Exercice 9

On considère  $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$  sur  $[-1, +\infty[$ .

a) On peut écrire

$$f(x) = (x+1)^{3/2}$$

b) Alors, sur  $] -1, +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$$

puis

$$f''(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} = \frac{3}{4\sqrt{x+1}}$$

c) Pour tout  $x > -1$ , on a  $\sqrt{x+1} > 0$ , donc

$$f''(x) > 0$$

Ainsi, la fonction est **convexe sur**  $] -1, +\infty[$ .

### Corrigé - Exercice 10

a) **Faux**. Le contre-exemple classique est  $f(x) = x^4$  : on a  $f''(0) = 0$ , mais aucun point d'inflexion en 0.

b) **Vrai**. Si  $f''(x) > 0$  sur un intervalle, alors  $f'$  y est croissante.

c) **Vrai**. Pour une fonction concave, la courbe est au-dessous de ses tangentes.

d) **Vrai**. Par exemple  $f(x) = \ln(x)$  sur  $]0, +\infty[$  est croissante car  $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ , et concave car  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ .

*Ce n'est pas seulement la pente qui compte, mais la façon dont elle change.*

**Corrigé - Exercice 11**

On considère  $f(x) = x^3$ .

a)

$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{et} \quad f''(x) = 6x$$

Le signe de  $6x$  change en 0, donc la courbe admet un point d'inflexion en 0.

b) L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Or  $f'(0) = 0$  et  $f(0) = 0$ , donc

$$y = 0$$

La tangente est l'axe des abscisses.

c) On compare  $f(x)$  à 0.

— si  $x < 0$ , alors  $x^3 < 0$  : la courbe est sous la tangente ;

— si  $x > 0$ , alors  $x^3 > 0$  : la courbe est au-dessus de la tangente.

La courbe traverse donc sa tangente au point d'inflexion.

**Corrigé - Exercice 12**

On considère  $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2$ .

a) En physique :

—  $s'(t)$  représente la vitesse ;

—  $s''(t)$  représente l'accélération.

b)

$$s'(t) = 3t^2 - 6t \quad \text{et} \quad s''(t) = 6t - 6$$

c) L'accélération change de signe quand

$$6t - 6 = 0 \iff t = 1$$

d) La courbe représentative de  $s$  est concave pour  $t < 1$  et convexe pour  $t > 1$ . Elle admet donc un point d'inflexion pour l'instant  $t = 1$ .

## Corrigé du problème

### Partie A

1.  $f(x) = e^x$ ,  $f'(x) = e^x$ ,  $f''(x) = e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Donc  $f$  est **convexe** sur  $\mathbb{R}$ .

2. La tangente en  $x = 0$  a pour équation  $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1 \cdot x + 1 = x + 1$ .

Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes, donc  $e^x \geq x + 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Vérification : en  $x = 0$ ,  $e^0 = 1 = 0 + 1$  ✓ (égalité). En  $x = 1$ ,  $e \approx 2,718 \geq 2$  ✓.

3. On applique  $e^x \geq 1 + x$  à  $x = \frac{a}{n}$  :

$$e^{a/n} \geq 1 + \frac{a}{n}$$

En élevant à la puissance  $n$  (les deux membres sont positifs, et la fonction  $t \mapsto t^n$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ ) :

$$(e^{a/n})^n \geq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

Or  $(e^{a/n})^n = e^a$ . D'où  $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq e^a$ .  $\square$

4. On applique  $e^x \geq 1 + x$  à  $x = -\frac{a}{n}$  (avec  $n > a$  pour que  $1 - \frac{a}{n} > 0$ ) :

$$e^{-a/n} \geq 1 - \frac{a}{n}$$

En élevant à la puissance  $n$  :  $e^{-a} \geq \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$ . En inversant (les deux côtés sont  $> 0$ ) :

$$e^a \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n} \quad \square$$

### Partie B

5.  $g(x) = \ln(x)$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  pour tout  $x > 0$ . Donc  $g$  est **concave** sur  $]0, +\infty[$ .

6. La tangente en  $x = 1$  :  $y = g'(1)(x - 1) + g(1) = 1 \cdot (x - 1) + 0 = x - 1$ .

Une fonction concave est en dessous de ses tangentes, donc  $\ln(x) \leq x - 1$  pour tout  $x > 0$ .  $\square$

Vérification : en  $x = 1$ ,  $\ln(1) = 0 = 1 - 1$  ✓. En  $x = e$ ,  $\ln(e) = 1 \leq e - 1 \approx 1,718$  ✓.

7. On applique  $\ln(x) \leq x - 1$  à  $x = \frac{a}{b}$  (avec  $a, b > 0$ , donc  $\frac{a}{b} > 0$ ) :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) \leq \frac{a}{b} - 1$$

Or  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ . D'où  $\ln(a) - \ln(b) \leq \frac{a}{b} - 1$ .  $\square$

8. De la question 7 :  $\ln(a) - \ln(b) \leq \frac{a}{b} - 1$ , soit  $b(\ln a - \ln b) \leq a - b$ .

En échangeant  $a$  et  $b$  :  $a(\ln b - \ln a) \leq b - a$ , soit  $-a(\ln a - \ln b) \leq b - a$ .

En additionnant les deux inégalités :

$$(b - a)(\ln a - \ln b) \leq (a - b) + (b - a) = 0$$

Or  $(b - a)(\ln a - \ln b) = -(a - b)(\ln a - \ln b)$ , et comme  $(a - b)$  et  $(\ln a - \ln b)$  sont de même signe (car  $\ln$  est croissante), on a  $(a - b)(\ln a - \ln b) \geq 0$ , donc :

$$(b - a)(\ln a - \ln b) \leq 0$$

Plus directement, reprenons l'inégalité  $\ln(x) \leq x - 1$  appliquée à  $x = \frac{a}{b}$  :

$$\ln a - \ln b \leq \frac{a}{b} - 1 = \frac{a - b}{b}$$

Appliquée à  $x = \frac{b}{a}$  :

$$\ln b - \ln a \leq \frac{b}{a} - 1 = \frac{b - a}{a}$$

En additionnant :  $0 \leq \frac{a-b}{b} + \frac{b-a}{a} = (a-b) \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{(a-b)(a-b)}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$ .

Donc  $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ , soit  $(a-b)^2 \geq 0$  (évident !), soit :

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \implies a^2 + b^2 \geq 2ab \implies \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Plus élégamment : de  $\ln(x) \leq x - 1$  appliquée à  $x = \frac{a}{b}$  et  $x = \frac{b}{a}$ , on obtient  $\ln \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b} - 1$  et  $\ln \frac{b}{a} \leq \frac{b}{a} - 1$ .

En additionnant ( $\ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{a} = 0$ ) :

$$0 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$$

Donc  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ . En multipliant par  $ab > 0$  :  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , soit  $(a-b)^2 \geq 0$ , d'où :

$$\left( \frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geq \frac{4ab}{4} = ab$$

En prenant la racine carrée (les deux membres sont positifs) :

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

Égalité ssi  $\frac{a}{b} = 1$ , c'est-à-dire  $a = b$ .  $\square$

### Partie C

9.  $h(x) = xe^{-x}$ .

$$h'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

$$h''(x) = (-1)e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (-1-1+x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

$$h'''(x) = e^{-x} + (x-2)(-e^{-x}) = (1-x+2)e^{-x} = (3-x)e^{-x}$$

10.  $h''(x) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$  (car  $e^{-x} > 0$ ).  $h''$  change de signe en  $x=2$  (négatif avant, positif après). Point d'inflexion :  $I = (2, 2e^{-2})$ .

11.  $h(2) = 2e^{-2}$  et  $h'(2) = (1-2)e^{-2} = -e^{-2}$ . Équation de la tangente :

$$T(x) = -e^{-2}(x-2) + 2e^{-2} = -e^{-2}x + 4e^{-2} = e^{-2}(4-x)$$

12. On calcule  $h(x) - T(x) = xe^{-x} - e^{-2}(4-x)$ .

On factorise en posant  $\varphi(x) = h(x) - T(x)$ . On sait que  $\varphi(2) = 0$  (la tangente touche la courbe) et  $\varphi'(2) = h'(2) - T'(2) = (-e^{-2}) - (-e^{-2}) = 0$ . Donc  $x=2$  est racine double « au moins » de  $\varphi$ .

De plus  $\varphi''(2) = h''(2) - T''(2) = 0 - 0 = 0$  et  $\varphi'''(2) = h'''(2) - 0 = (3-2)e^{-2} = e^{-2} > 0$ .

Comme la première dérivée non nulle de  $\varphi$  en  $x=2$  est  $\varphi'''(2) > 0$  et est d'ordre **impair** (ordre 3), la fonction  $\varphi$  change de signe en  $x=2$  : elle passe de négatif à positif.

Donc la tangente **traverse** la courbe au point d'inflexion : la courbe est en dessous de la tangente pour  $x < 2$  (près de 2), et au-dessus pour  $x > 2$  (près de 2).

*Ce n'est pas seulement la pente qui compte, mais la façon dont elle change.*

**Fin de la Fiche 8 - Dérivée seconde, convexité et points d'inflexion**

Tu maîtrises maintenant la lecture fine de la courbure d'une fonction. Tu ne sais plus seulement dire si une courbe monte ou descend : tu sais expliquer comment elle se plie, où elle bascule et comment ses tangentes se placent. C'est un cap très important vers les études de fonctions solides et les vraies rédactions de niveau bac.

*Quand tu comprends la courbure, tu commences vraiment à lire les fonctions comme un mathématicien.*

→ **Prochaine Fiche : Continuité et théorème des valeurs intermédiaires.**